Introdução aos Processos Estocásticos

Luiz Renato Fontes

Perda de memória (assintótica)

Seja $(X_n) \sim \mathrm{CM}(\mu, \mathbf{P})$ em $\mathcal{S}$. Pode ocorrer que

$$\mathbf{P}^n \to \mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ quando } n \to \infty,$$

onde π é uma distribuição de probabilidade em $\mathcal{S}$. A convergência acima significa que

$$P^{(n)}(x, y) = \mathbb{P}(X_n = y | X_0 = x) \to \pi(y), \; x, y \in \mathcal{S},$$

e, como o lado direito *não depende* de x, dizemos que *a memória* sobre a condição inicial da CM em questão *se perde* qdo $n \to \infty$.

Obs. Note que neste caso $\mathbb{P}(X_n = \cdot) = \mu\mathbf{P}^n \to \mu\mathbf{\Pi} = \pi$ quando $n \to \infty$ para qualquer ditribuição inicial μ.

Perda de memória (cont.)

No caso de processo com 2 estados, conforme Exemplo 2, Álbum 1, Slide 19, se $0 < \alpha + \beta < 2$, então $\mathbf{P}^n \to \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \end{pmatrix}$, onde $\pi = \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}, \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \right)$, como verificado no Álbum 1, Slide 20.

No Exemplo $2'$, Álbum 1, temos perda de memória se $\alpha < 1$ ou $N \geq 3$.

Exemplo 3, Álbum 1

É imediato de (4) que $P_{11}^{(n)} \to \frac{1}{5}$; de forma análoga obtemos:

$$P_{xy}^{(n)} \to \pi_y, \ \forall x, y \ (\text{com } \pi_1 = \tfrac{1}{5}).$$

Também podemos fazer

$$\mathbf{P}^n \to \mathbf{U} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{U}^{-1} =: \mathbf{\Pi} = (\Pi_{xy})_{x,y \in \mathcal{S}}.$$

Usando o fato que $\mathbf{U} = (v_1^t, v_2^t, v_3^t)$, com $v_1 = (1,1,1)$, concluímos prontamente que Π_{xy} não depende de x.

Convergência

Um dos objetivos deste curso é entender sob que condições se dá a convergência de $\mathbf{P}^n$ com perda de memória, ie

$$\mathbf{P}^n \to \mathbf{\Pi} \text{ quando } n \to \infty, \text{ com } \Pi_{xy} = \pi_y, \forall x, y \in \mathcal{S},$$

e de tal forma que $\sum_{y \in \mathcal{S}} \pi_y = 1$.

No Exemplo 2, Álbum 1, se $\alpha + \beta = 0$, então temos convergência, mas sem perda de memória; se $\alpha + \beta = 2$, então não temos convergência.

As abordagens diretas dos Exemplos 2 e 3, Álbum 1, mencionados acima, não funcionam bem em geral, mesmo para $|\mathcal{S}| = m < \infty$. Vamos pelo restante deste álbum considerar um caso particular desse último caso, em que abordagem semelhante funciona.

Autovalores/autovetores de matrizes estocásticas

Da teoria de matrizes estocásticas/não negativas, temos que todos os autovalores de **P** são ≤ 1 em módulo. Lembrando que $\lambda_1 = 1$ é sempre autovalor associado ao autovetor $(1, \ldots, 1)$, **se** ocorrer de todos os demais $m-1$ autovalores, $\lambda_2, \ldots, \lambda_m$, serem < 1 em módulo, então

$$\mathbf{P}^n = \mathbf{U}\mathbf{J}^n\mathbf{U}^{-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & * & \cdots & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \mathbf{U}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \mathbf{U}^{-1} =: \mathbf{\Pi}$$

Forma Canônica de Jordan (recordação)

No slide anterior, temos que

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{B}_\ell \end{pmatrix}, \ \mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}_{k_i \times k_i},$$

$$k_1 + \cdots + k_\ell = m, \ \lambda_1 = 1, \ k_1 = 1$$

$$\mathbf{J}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1^n & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2^n & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{B}_\ell^n \end{pmatrix}, \ \mathbf{B}_i^n = \begin{pmatrix} \lambda_i^n & * & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_i^n & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i^n & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i^n \end{pmatrix} \to \mathbf{0}$$

quando $n \to \infty$, se $|\lambda_i| < 1$ — pois nesse caso

$$|\lambda_i|^n, \ |*| \le \text{const } n^{k_i} |\lambda_i|^n \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Convergência (cont.)

No Slide 5, $\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} \pi \\ \vdots \\ \pi \end{pmatrix}$, onde π é a primeira linha de $\mathbf{U}^{-1}$.

Como π é limite de distribuições de probabilidade em $\mathcal{S}$, também é, ela mesma, uma distribuição de probabilidade em $\mathcal{S}$; vê-se então que temos convergência com perda de memória.

Observação

1) A convergência acima é exponencialmente rápida, como nos exemplos de perda de memória vistos antes. (Nesse caso, não é difícil verificar que a taxa de convergência exponencial é dada por $\max_{2 \leq i \leq m} \big| \log |\lambda_i| \big|$.)

2) Uma condição suficiente para que todos os autovalores de $\mathbf{P}$ sejam < 1 em módulo (a menos de um autovalor, a saber, $\lambda_1 = 1$) é que exista $n_0 \geq 1$ tal que se $n \geq n_0$, então $P^n_{xy} > 0 \; \forall x, y \in \mathcal{S}$.

Se $P_{xy} > 0 \; \forall x, y \in \mathcal{S}$, então tal condição vale com $n_0 = 1$.